Contrôle final de Thermodynamique (1h 30 mn)

Question de cours (5 pts)

1°) A partir de la définition de l'enthalpie : $H = U + PV$, montrer que la relation de Rober-Mayer, pour une mole de gaz parfait, s'écrit sous la forme : $C_p - C_v = R$

R : constante universelle des gaz parfait, C_P et C_v sont respectivement les capacités thermiques à pression et volume constants.

2°) Ecrire la relation de Mayer pour n moles.

3°) Sachant que $\gamma = \frac{C_P}{C_v}$ et en utilisant la relation de Mayer, déterminer les expressions de C_p et C_v en fonction de R, de γ et du nombre de mole n.

Exercice (15 pts)

On fait décrire à une mole d'un gaz parfait diatomique le cycle Diesel constitué des transformations réversibles suivantes :

- $1 \to 2$: compression adiabatique ;
- $2 \to 3$: chauffage isobare ;
- $3 \to 4$: détente adiabatique ;
- $4 \to 1$: refroidissement isochore.

On donne : $\gamma = \frac{C_P}{C_V} = 1,4$; les rapports volumétriques des transformations adiabatiques :

$a = \frac{V_1}{V_2} = 9$ et $b = \frac{V_4}{V_3} = 3$; $R = 8,32\ J.mol^{-1}.K^{-1}$; $P_1 = 10^5\ Pa$; $T_1 = 300\ K$.

1°) Représenter le cycle dans un diagramme de Clapeyron (P, V). Justifier que le cycle est moteur.

2°) Calculer le volume V_1 du gaz à l'état 1.

3°) Déterminer les expressions de P_2, P_3 et P_4 en fonction de a, b, γ et P_1. Calculer leurs valeurs

4°) Déterminer les expressions de V_2, V_3 et V_4 en fonction de a, b, γ et V_1. Calculer leurs valeurs

5°) Déterminer et calculer les quantités de chaleur échangées au cours des différentes transformations.

6°) Déterminer et calculer les travaux misent en jeu le long du cycle. Déduire la variation de l'énergie interne sur tout le cycle.

7°) Déterminer les expressions de la variation d'entropie pour chaque transformation. Calculer leurs valeurs et vérifier que la variation d'entropie sur tout le cycle est nulle.

8°) Le cycle Diesel reçoit une quantité de chaleur Q_c durant la transformation $2 \to 3$ et rejette une quantité de chaleur Q_a durant la transformation $4 \to 1$. Etablir l'expression du rendement thermique du moteur en fonction de Q_c et Q_a. Calculer sa valeur.

9°) Montrer que l'expression du rendement thermique s'écrit en fonction de a, b et γ sous la forme :

$$\eta = 1 - \frac{1}{\gamma}\frac{b^{-\gamma} - a^{-\gamma}}{b^{-1} - a^{-1}}$$

Mostafa EL ATIKI

la Correction du Contrôle final de thermodynamique 2013/2014

Tel: 0666803467

Question de Cours:

1°) on a $H = U + PV$

$$\frac{dH}{dT} = \frac{dU}{dT} + \frac{d(PV)}{dT}$$

$\begin{cases} dH = C_p \, dT \\ dU = C_V \, dT \end{cases}$ et $| PV = RT \ (n=1)$

$$C_p = C_V + R.$$

$$\boxed{C_p - C_V = R}$$

2°) $PV = nRT$

$$\frac{dH}{dT} = \frac{dU}{dT} + \frac{d}{dT}(nRT)$$

$$C_p = C_V + nR$$

$$\boxed{C_p - C_V = nR}$$

3°) on a $C_p - C_V = nR$ $\quad | \gamma = \frac{C_p}{C_V}$

$$C_p\left(1 - \frac{C_V}{C_p}\right) = nR$$

$$C_p\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) = nR.$$

$$\boxed{C_p = \frac{\gamma nR}{\gamma - 1}}$$

*) $C_p - C_V = nR.$

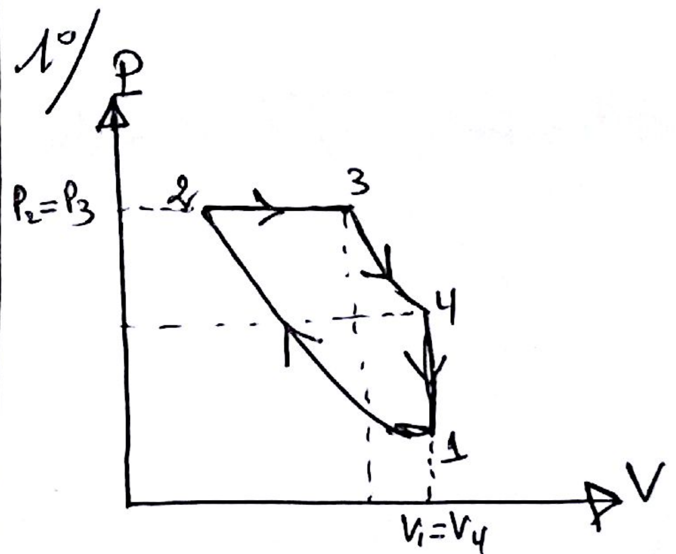
$$C_V\left(\frac{C_p}{C_V} - 1\right) = nR.$$

$$C_V(\gamma - 1) = nR.$$

$$\boxed{C_V = \frac{nR}{\gamma - 1}}$$

EXERCICE:

1°)



*) le parcours est effectué dans le sens horaire donc le cycle est moteur.

2

2°)

On a $P_1 V_1 = R T_1$.

$$V_1 = \frac{R T_1}{P_1}$$

A.N : $V_1 = 24{,}9 \cdot 10^{-3}\, m^3$

3°)

$P_1 V_1^{\gamma} = P_2 V_2^{\gamma}$

$P_2 = P_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma} \Rightarrow \boxed{P_2 = a^{\gamma} \cdot P_1}$

A.N $\Rightarrow$ $P_2 = 21{,}7 \cdot 10^5\, Pa$

*) Transformation isobare $P = cste$.

$\Rightarrow \boxed{P_3 = P_2 = a^{\gamma} \cdot P_1}$

$P_3 = 21{,}7 \cdot 10^5\, Pa$

*) $P_3 V_3^{\gamma} = P_4 V_4^{\gamma}$

$P_4 = P_3 \cdot \left(\frac{V_3}{V_4}\right)^{\gamma} = P_3 \cdot \frac{1}{b^{\gamma}}$

$$P_4 = \left(\frac{a}{b}\right)^{\gamma} \cdot P_1$$

$P_4 = 4{,}65 \cdot 10^5\, Pa$

3°)

$P_1 V_1^{\gamma} = P_2 V_2^{\gamma}$

$V_2^{\gamma} = \frac{P_1}{P_2} \cdot V_1^{\gamma} = \left(\frac{V_1}{a}\right)^{\gamma}$

$$V_2 = \frac{V_1}{a}$$

$V_2 = 2{,}76 \cdot 10^{-3}\, m^3$

*) $P_3 V_3^{\gamma} = P_4 V_4^{\gamma}$

$V_3^{\gamma} = \frac{P_4}{P_3} V_4^{\gamma} = \left(\frac{V_4}{b}\right)^{\gamma}$

$\boxed{V_3 = \frac{V_4}{b} = \frac{V_1}{b}}$ $V_3 = 8{,}3 \cdot 10^{-3}\, m^3$

*) $\boxed{V_4 = V_1}$ Tranf. isochore

$V_4 = 24{,}9 \cdot 10^{-3}\, m^3$

5°)

$Q_{12} = 0$ (adiabatique)

*) $Q_{23} = \int_2^3 C_p \, dT$

$= C_p \, (T_3 - T_2)$

$= C_p \left(\frac{P_3 V_3}{R} - \frac{P_2 V_2}{R}\right)$ $(P_2 = P_3)$

$= \frac{P_2 \cdot C_p}{R} (V_3 - V_2)$

$$Q_{23} = \frac{\gamma_1 a^{\gamma}}{\gamma - 1} R T_1 \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)$$

$$Q_{23} = 42,08 \text{ kJ}$$

*) $$Q_{3,4} = 0$$

*) $$Q_{41} = C_v \int_4^1 dT$$

$$= C_v (T_1 - T_4)$$

$$= C_v \left(\frac{P_1 V_1}{R} - \frac{P_4 V_4}{R} \right) \qquad V_1 = V_4$$

$$= \frac{V_1 C_v}{R} (P_1 - P_4)$$

$$= C_v \cdot \frac{V_1 P_1}{R} \left(1 - \left(\frac{a}{b}\right)^\gamma\right)$$

$$Q_{4,1} = \frac{R}{\gamma - 1} T_1 \left(1 - \left(\frac{a}{b}\right)^\gamma\right)$$

$$Q_{41} = -22,81 \text{ kJ}$$

6°) $$W_{12} = -\int_1^2 P \, dV$$

$$P_1 V_1^\gamma = P_2 V_2^\gamma = C = P V^\gamma$$

$$W_{12} = -C \int_1^2 \frac{dV}{V^\gamma}$$

$$= -C \left[\frac{V_2^{1-\gamma} - V_1^{1-\gamma}}{1-\gamma} \right]$$

$$= \frac{C V_1^{1-\gamma} - C V_2^{1-\gamma}}{1-\gamma}$$

$$W_{12} = \frac{P_1 V_1 - P_2 V_2}{1-\gamma}$$

$$W_{12} = \frac{P_1 V_1}{\gamma - 1} \left(1 - a^{\gamma - 1}\right)$$

$$W_{12} = 8,78 \text{ kJ}$$

*) $$W_{23} = -\int_2^3 P_2 \, dV$$

$$= -P_2 (V_3 - V_2)$$

$$= -P_1 \cdot a^\gamma \left(\frac{V_1}{b} - \frac{V_1}{a} \right)$$

$$W_{23} = -R T_1 \cdot a^\gamma \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right)$$

$$W_{23} = -12,02 \text{ kJ}$$

*) $$W_{34} = -\int_3^4 P \, dV = -\int_3^4 C \frac{dV}{V^\gamma}$$

$$= -C \left[\frac{V_4^{1-\gamma} - V_3^{1-\gamma}}{1-\gamma} \right]$$

$$= \frac{P_3 V_3 - P_4 V_4}{1-\gamma}$$

$$W_{34} = \frac{a^\gamma \cdot P_1 V_1}{1-\gamma} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{b^\gamma} \right)$$

$$W_{34} = -16,03 \text{ kJ}$$

*) $$W_{41} = 0 \qquad V = \text{cste}$$

4

*) $\Delta U_{cycle} = W_{cycle} + Q_{cycle}$

$W_{cycle} = W_{12} + W_{23} + W_{34} + W_{41}$

$= 8,78 - 12,02 - 16,03$

$= -19,27\ kJ$

$Q_{cycle} = Q_{12} + Q_{23} + Q_{34} + Q_{41}$

$= 42,08 - 22,81$

$= 19,27\ kJ$

$=0$ $\boxed{\Delta U_{cycle} = 0}$

7°/ $\Delta S = \int \frac{\delta Q}{T}$

*) $\boxed{\Delta S_{12} = 0}$ $\quad \underline{Q = 0}$

*) $\Delta S_{23} = \int_2^3 \frac{\delta Q}{T} = C_p \int_2^3 \frac{dT}{T}$

$= C_p \ln\left(\frac{T_3}{T_2}\right)$

$= C_p \ln\left(\frac{P_3 V_3}{R} * \frac{R}{P_2 V_2}\right)$

$= C_p \ln\left(\frac{V_3}{V_2}\right)$

$\boxed{\Delta S_{23} = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} \ln\left(\frac{a}{b}\right)}$

$\boxed{\Delta S_{23} = 32\ J}$

*) $\boxed{\Delta S_{34} = 0}$

*) $\Delta S_{41} = C_V \int_4^1 \frac{dT}{T}$

$= C_V \ln\left(\frac{T_1}{T_4}\right)$

$= C_V \ln\left(\frac{P_1 V_1}{R} \cdot \frac{R}{P_4 V_4}\right)$

$= C_V \ln\left(\frac{P_1}{P_4}\right)$

$\boxed{\Delta S_{41} = \frac{R}{\gamma - 1} \ln\left(\frac{b}{a}\right)^{\gamma}}$

$\boxed{\Delta S_{41} = -32\ J}$

*)

$\Delta S_{cycle} = \Delta S_{12} + \Delta S_{23} + \Delta S_{34} + \Delta S_{41}$

$= -32 + 32$

$= 0$

$\boxed{\Delta S_{cycle} = 0}$

8°)

$$\eta = \left| \frac{W_{cycle}}{Q_c} \right|$$

$W_{cycle} < 0$ et $Q_c = Q_{23} > 0$

$$\eta = -\frac{W_{cycle}}{Q_c}$$

On a $W_{cycle} + Q_c + Q_a = 0$

$$W_{cycle} = -(Q_c + Q_a).$$

$$\eta = \frac{Q_c + Q_a}{Q_c} = 1 + \frac{Q_a}{Q_c}$$

$$\boxed{\eta = 1 + \frac{Q_a}{Q_c}}$$

$Q_a = Q_{41} = -22{,}81\ kJ$

$Q_c = Q_{23} = 42{,}08\ kJ.$

$$\eta = 1 - \frac{22{,}81}{42{,}08}$$

$$\boxed{\eta = 45{,}8\%}$$

9°/ On a $\eta = 1 + \dfrac{Q_{41}}{Q_{23}}$

$$\eta = 1 + \frac{\frac{R}{\gamma-1} T_1 \left(1 - \left(\frac{a}{b}\right)^\gamma\right)}{\frac{\gamma \cdot a^\gamma}{\gamma-1} R T_1 \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)}$$

$$\eta = 1 + \frac{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^\gamma}{\gamma \cdot a^\gamma \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)}$$

$$\eta = 1 + \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{a^{-\gamma}\left(1 - \left(\frac{a}{b}\right)^\gamma\right)}{b^{-1} - a^{-1}}$$

$$= 1 + \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{a^{-\gamma} - b^{-\gamma}}{b^{-1} - a^{-1}}$$

$$\boxed{\eta = 1 - \frac{1}{\gamma} \frac{b^{-\gamma} - a^{-\gamma}}{b^{-1} - a^{-1}}}$$

Bonne chance

0666803467